OLIMPIADA SATELOR DIN ROMÂNIA

ETAPA LOCALĂ - SUCEAVA, 23.02.2024
BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

CLASA a VII-a

.

1. a) (4p)) Aflați numerele raționale x, y, z știind că $\frac{x}{2}=\frac{y}{3}$, $\frac{y}{5}=\frac{z}{7}$ și 10x+6y+3z=2024.

b) (3p) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $[x]+\{x+2023\}=2024$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a numărului x, iar $\{x+2023\}$ este partea fracționară a numărului x+2023.

Soluție:

a) $\frac{x}{2}=\frac{y}{3} si \frac{y}{5}=\frac{z}{7} \Rightarrow \frac{x}{10}=\frac{y}{15}=\frac{z}{21}=k \Rightarrow x=10k, y=15k, z=21k$

$10x+6y+3z=2024 \Rightarrow 100k+90k+63k=2024 \Rightarrow 253k=2024 \Rightarrow k=8$

X=80, y=120, z=168

b) $[x]+\{x+2023\}=2024 \Leftrightarrow [x]+\{x\}=2024 \Leftrightarrow x=2024$

Barem:

a) $\frac{x}{2}=\frac{y}{3} si \frac{y}{5}=\frac{z}{7} \Rightarrow \frac{x}{10}=\frac{y}{15}=\frac{z}{21}=k \Rightarrow x=10k, y=15k, z=21k$	2p
$10x+6y+3z=2024 \Rightarrow 100k+90k+63k=2024 \Rightarrow 253k=2024 \Rightarrow k=8$	1p
X=80, y=120, z=168	1p
b) $[x]+\{x+2023\}=2024 \Leftrightarrow [x]+\{x\}=2024$	2p
$[x]+\{x\}=2024 \Leftrightarrow x=2024$	1p

2. a) (3p) Calculați numărul N dacă: $N=\sqrt{1+\sqrt{2024+2+4+6+...+4046}}$

b)(4p) Aflați suma numerelor raționale a, b, c dacă are loc egalitatea:

$a(\sqrt{2023}-23)+b(\sqrt{2024}-24)=c(\sqrt{2025}-25)-20$

Soluție:

a) $N=\sqrt{1+\sqrt{2024+2+4+6+...+4046}} \Leftrightarrow N=\sqrt{1+\sqrt{2024+2(1+2+3+4+...+2023}}=\sqrt{1+\sqrt{2024+2023\cdot 2024}}$

$=\sqrt{1+\sqrt{2024^2}}=\sqrt{2025}=45$

b) $a(\sqrt{2023}-23)+b(\sqrt{2024}-24)=c(\sqrt{2025}-25)-20 \Leftrightarrow$

$a(17\sqrt{7}-23)+b(2\sqrt{506}-24)=c(45-25)-20 \Leftrightarrow a\cdot 17\sqrt{7}+b\cdot 2\sqrt{506}-23a-24b-20c+20=0$

Cum $a,b,c\in\mathbb{Q}$, obținem a=0, b=0, c=1 $\Rightarrow$ a+b+c=1

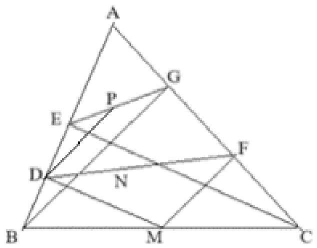
Barem:

a) $N=\sqrt{1+\sqrt{2024+2(1+2+3+4+...+2023}}$	1p
$=\sqrt{1+\sqrt{2024+2023\cdot 2024}}$	1p
$=\sqrt{1+\sqrt{2024^2}}=\sqrt{2025}=45$	1p
b) $a(17\sqrt{7}-23)+b(2\sqrt{506}-24)=c(45-25)-20$	1p
$a\cdot 17\sqrt{7}+b\cdot 2\sqrt{506}-23a-24b-20c+20=0$	1p
Cum $a,b,c\in\mathbb{Q}$, obținem a=0, b=0, c=1 $\Rightarrow$ a+b+c=1	2p

3. Fie triunghiul ABC, M mijlocul laturii BC și punctele D și E pe latura AB, F și G pe latura AC astfel încât DM$\parallel$CE și MF$\parallel$BG. Notăm cu N și P mijloacele segmentelor DF, respectiv EG. Demonstrați că punctele M,N,P sunt coliniare.

Gazeta Matematică Nr. 10/2023

Soluție:



MD=linie mijlocie în ΔBCE $\Rightarrow$D=mijlocul segmentului BE

MF=linie mijlocie în ΔBCG $\Rightarrow$ $MF=\dfrac{BG}{2}$

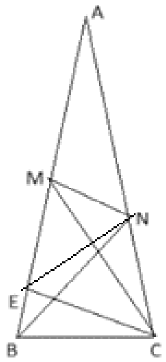
PD=linie mijlocie în ΔBEG $\Rightarrow$DP$\parallel$BG și $DP=\dfrac{BG}{2}$

$\Rightarrow$DPFM = paralelogram și N = mijlocul segmentului DP$\Rightarrow$M,N,P sunt coliniare

Barem:

Realizarea corectă a desenului	1p
MD=linie mijlocie în ΔBCE $\Rightarrow$D=mijlocul segmentului BE	2p
MF=linie mijlocie în ΔBCG $\Rightarrow$MF || BG și $MF = \frac{BG}{2}$	1p
PD=linie mijlocie în ΔBEG $\Rightarrow$DP|| BG și $DP = \frac{BG}{2}$	2p
DPFM = paralelogram și N = mijlocul segmentului DP$\Rightarrow$M,N,P sunt coliniare	1p

4. Pe latura AB a triunghiului isoscel ABC, $AB \equiv AC$ și $\sphericalangle$ A = 20^0 se ia puntul M astfel ca $\sphericalangle$ MCA=20^0 iar pe AC se ia un punctul N astfel ca $\sphericalangle$ NBA=30^0. Să se afle măsura unghiului NMB.



Soluție: $\sphericalangle ACB = \sphericalangle ABC = 80^0$, $\sphericalangle CBN = 50^0 = 80^0 - 30^0 = 50^0$

$\sphericalangle$ CNB = $180^0 - 80^0 - 50^0 = 50^0$ de unde $\triangle CBN = isoscel \Rightarrow BC \equiv CN$ (1) Fie punctul E $\in [AB]$ a.î. $\sphericalangle$ BCE = $20^0 \Rightarrow \triangle BCE = isoscel$, $BC \equiv CE$ (2) Din (1) , (2) şi $\sphericalangle$ NCE = 60^0 obţinem $\triangle CNE = echilateral$ $CE \equiv CN \equiv NE$ (3) şi $\sphericalangle$ NEC = 60^0.

$\sphericalangle$ CEM = 100^0 şi $\sphericalangle$ ECM = 40^0 $\Rightarrow \sphericalangle CME = 40^0$ şi $\triangle CEM = isoscel$ $EM \equiv CE$ (4) Din (3) şi (4) $\Rightarrow EM \equiv NE$ şi cum $\sphericalangle$ NEM= 40^0 obţinem $\sphericalangle$ NME = 70^0

Barem:

Calculează $\sphericalangle ACB = \sphericalangle ABC = 80^0$ şi $\sphericalangle CBN = 50^0$	1p
$\sphericalangle$ CNB = $180^0 - 80^0 - 50^0 = 50^0$ de unde $\triangle CBN = isoscel \Rightarrow BC \equiv CN$	1p
E $\in [AB]$ a.î. $\sphericalangle$ BCE = $20^0 \Rightarrow \triangle BCE = isoscel$, $BC \equiv CE$, $\sphericalangle$ NCE = 60^0	1p
Obţine $\triangle CNE = echilateral$ $CE \equiv CN \equiv NE$, $\sphericalangle$ NEC = 60^0	1p
$\triangle CEM = isoscel$	1p
$\sphericalangle$ NEM= 40^0	1p
Obţine $\sphericalangle$ NME = 70^0	1p

Propunător Prof. Dorel Ispășoiu Gura Humorului

Notă: Orice altă soluţie corectă se va puncta corespunzător.