OLIMPIADA SATELOR DIN ROMÂNIA

ETAPA LOCALĂ - SUCEAVA 25.02.2023
BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

Clasa a VIII-a

1. Să se arate că :

a) **(3p)** $42-10\sqrt{17}=\left(5-\sqrt{17}\right)^2$;

b) **(4p)** $x=\sqrt{\dfrac{21-5\sqrt{17}}{2}}+\sqrt{\dfrac{21+5\sqrt{17}}{2}}\in\mathbb{N}$.

Soluție:

a) $\left(5-\sqrt{17}\right)^2=5^2-2\cdot5\cdot\sqrt{17}+\left(\sqrt{17}\right)^2=25-10\sqrt{17}+17=42-10\sqrt{17}$

b) $x=\sqrt{\dfrac{21-5\sqrt{17}}{2}}+\sqrt{\dfrac{21+5\sqrt{17}}{2}}=\sqrt{\dfrac{2\cdot\left(21-5\sqrt{17}\right)}{2\cdot2}}+\sqrt{\dfrac{2\cdot\left(21+5\sqrt{17}\right)}{2\cdot2}}$

$=\sqrt{\dfrac{42-10\sqrt{17}}{4}}+\sqrt{\dfrac{42+10\sqrt{17}}{4}}=\left|\dfrac{5-\sqrt{17}}{2}\right|+\left|\dfrac{5+\sqrt{17}}{2}\right|=\dfrac{5-\sqrt{17}}{2}+\dfrac{5+\sqrt{17}}{2}=\dfrac{10}{2}=5\in\mathbb{N}$

Barem de corectare:

a)	$\left(5-\sqrt{17}\right)^2=5^2-2\cdot5\cdot\sqrt{17}+\left(\sqrt{17}\right)^2=$	**1 p**
	$=25-10\sqrt{17}+17=$	**1 p**
	$=42-10\sqrt{17}$	**1 p**
b)	$\sqrt{\dfrac{21-5\sqrt{17}}{2}}=\sqrt{\dfrac{42-10\sqrt{17}}{4}}$	**1 p**
	$=\dfrac{\left\|5-\sqrt{17}\right\|}{2}=\dfrac{5-\sqrt{17}}{2}$	**1 p**
	$\sqrt{\dfrac{21+5\sqrt{17}}{2}}=\dfrac{5+\sqrt{17}}{2}$	**1 p**
	$x=\dfrac{5-\sqrt{17}}{2}+\dfrac{5+\sqrt{17}}{2}=5\in\mathbb{N}$	**1 p**

2. Fie $A=\left\{x\in\mathbb{R}/\left|2x-5\right|\geq9\right\}$ şi $B=\left\{x\in\mathbb{R}/\dfrac{x+1}{2}+\dfrac{x+2}{3}+\dfrac{x+3}{4}+\dfrac{x+4}{5}+\dfrac{x+5}{6}>5\right\}$.

Determinaţi:

a) **(3p)** mulţimea A;
b) **(4p)** mulţimea $A\cap B$.

Profesor, Munteanu Liliana

Soluție:

a) $\left|2x-5\right|\geq9\Leftrightarrow 2x-5\leq-9$ sau $2x-5\geq9\Leftrightarrow x\leq-2$ sau $x\geq7$

cum $x\in\mathbb{R}\Rightarrow x\in(-\infty,-2]\cup[7,+\infty)\rightarrow A=(-\infty,-2]\cup[7,+\infty)$

b) $\dfrac{x+1}{2}+\dfrac{x+2}{3}+\dfrac{x+3}{4}+\dfrac{x+4}{5}+\dfrac{x+5}{6}>5$

$$\Leftrightarrow \frac{x+1}{2}-1+\frac{x+2}{3}-1+\frac{x+3}{4}-1+\frac{x+4}{5}-1+\frac{x+5}{6}-1>0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-1}{2}+\frac{x-1}{3}+\frac{x-1}{4}+\frac{x-1}{5}+\frac{x-1}{6}>0 \Leftrightarrow (x-1)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right)>0 \Leftrightarrow x-1>0, \quad \text{cum} \quad x\in\mathbb{R}$$

$$\Rightarrow B=(1,+\infty)$$

$$A\cap B=(-\infty,-2]\cup[7,+\infty)\cap(1,\infty)=[7,+\infty)$$

Barem de corectare:

a)	$\lvert 2x-5\rvert \geq 9 \Leftrightarrow 2x-5\leq -9$ sau $2x-5\geq 9$	**1 p**
	$x\leq -2$ sau $x\geq 7$	**1 p**
	cum $x\in\mathbb{R} \to A=(-\infty,-2]\cup[7,+\infty)$	**1 p**
b)	$\frac{x+1}{2}-1+\frac{x+2}{3}-1+\frac{x+3}{4}-1+\frac{x+4}{5}-1+\frac{x+5}{6}-1>0$	**1 p**
	$(x-1)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right)>0$	**1 p**
	$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right)>0 \Rightarrow x>1$ şi $x\in\mathbb{R} \to B=(1,\infty)$	**1 p**
	$A\cap B=[7,+\infty)$	**1 p**

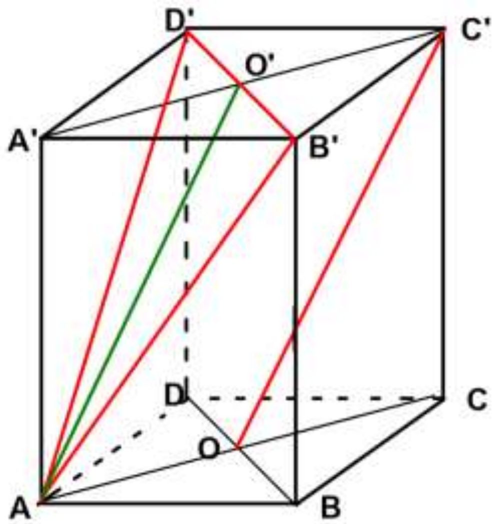
3. Fie paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ cu O- centrul bazei $ABCD$ şi O' - centrul bazei $A'B'C'D'$. Ştiind că $AB=6\sqrt{3}\ cm$, $BC=6\ cm$ şi $O'C=12\ cm$. Se cere:

a) **(3p)** lungimea înălţimii AA' a paralelipipedului;

b) **(2p)** măsura unghiului dintre AD' şi CC';

c) **(2p)** să se arate că $OC' \parallel (AB'D')$.

Soluţie:



a) $ABCD$-dreptunghi

$\Rightarrow AC^2=AB^2+BC^2 \to AC=12\ cm \Rightarrow CO=6\ cm$;

din $\triangle OCC'$ dreptunghic în C

$\Rightarrow C'C^2=C'O^2-OC^2 \Rightarrow C'C^2=12^2-6^2 \Rightarrow$

$C'C=6\sqrt{3}\,cm \Rightarrow AA'=6\sqrt{3}\ cm$

b) cum $CC' \parallel DD' \Rightarrow \sphericalangle(AD',CC')=\sphericalangle(AD',DD')=\sphericalangle AD'D$;

din $\triangle ADD'$ avem (aplicând teorema lui Pitagora) că $AD'=12$

din $\triangle ADD'$ dreptunghic cu $AD=AD':2$ avem (conform reciprocei teoremei $\sphericalangle$ de 30^0) că $m(\sphericalangle AD'D)=30^0$

c) avem că $AOCO'$ paralelogram

$(AO \parallel O'C',\ AO=O'C') \Rightarrow OC' \parallel AO'$, dar cum

$AO' \subset (AB'D') \Rightarrow OC' \parallel (AB'D')$

Barem de corectare:

a)	AC diagonală în $ABCD,\ AC=12\ cm,\ OC=6\ cm$	**2 p**
	$\triangle OCC': CC'=6\sqrt{3} \rightarrow AA'=6\sqrt{3}$	**1 p**
b)	cum $CC' \parallel DD' \Rightarrow \sphericalangle(AD',CC')=\sphericalangle(AD',DD')=\sphericalangle AD'D$	**1 p**
	$\triangle ADD'$ dreptunghic în $D \Rightarrow AD'=12=2\cdot AD \rightarrow m(\sphericalangle AD'D)=30^0$	**1 p**
c)	$AOC'O'$ paralelogram $\Rightarrow OC' \parallel AO'$	**1 p**
	$AO' \subset (AB'D')$ şi $OC' \parallel AO' \Rightarrow OC' \parallel (AB'D')$	**1 p**

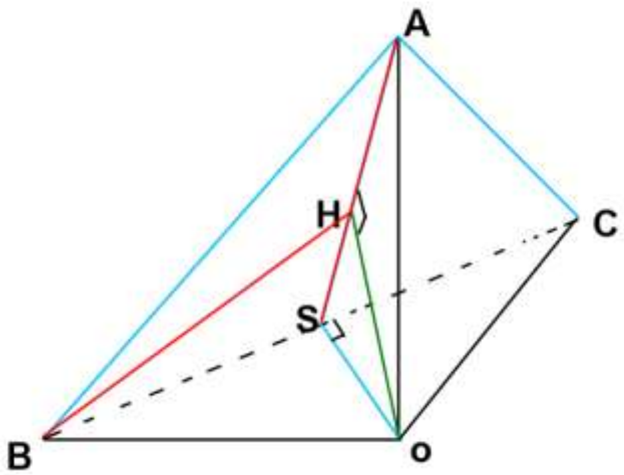
4. Fie tetraedrul $OABC$ cu $OA \perp OB \perp OC \perp OA,\ OB=OC=4\ cm$ şi $OA=3\ cm$. Se cere:

a) **(3p)** să se calculeze aria $\triangle ABC$;

b) **(4p)** să se arate că proiecţia punctului O pe planul (ABC) coincide cu ortocentrul H al triunghiului ABC.

Profesor, Munteanu Eugen

Soluţie:



a) din $\triangle OAB, \triangle OAC$ şi $\triangle OBC$ dreptunghice vom avea (cu teorema lui Pitagora) că $AB=AC=5\ cm$ şi $BC=4\sqrt{2}\ cm$.

$\triangle ABC$ isoscel de bază BC

$\Rightarrow h_A=\sqrt{5^2-(2\sqrt{2})^2} \Rightarrow h_A=\sqrt{25-8} \rightarrow h_A=\sqrt{17}\ cm$

$$A_{\triangle ABC}=\frac{BC\cdot h_A}{2}=\frac{4\sqrt{2}\cdot\sqrt{17}}{2}=2\sqrt{34}\ cm^2$$

b) Din $A \notin (OBC),\ BC \subset (OBC);\ OA \perp (OBC)$ şi $OS \perp BC$ avem (conform T3$\perp$) că $AS \perp BC$.

Fie $OH \perp AS,\ H \in AS$. Din $O \notin (ABC),\ BC,\ AS \subset (ABC),\ OH \perp AS,\ HS \perp BC\ si\ OS \perp BC$ avem (conform reciprocei 2 a T3$\perp$) $OH \perp (ABC)$, adică $pr_{(ABC)}O=H$.

Din $OH \perp (ABC)$ şi $AC \subset (ABC)$ avem $OH \perp AC$, adică $AC \perp OH$ (1)

Din $OB \perp OC,\ OB \perp OA$ cu $OA \cap OC=\{O\}$ avem $OB \perp (AOC) \Rightarrow OB \perp AC$, adică $\rightarrow AC \perp OB$ (2)

Din (1), (2) şi $OH \cap OB=\{O\} \Rightarrow AC \perp (OBH) \rightarrow AC \perp BH$, adică $BH \perp AC$. Din $AH \perp BC$ şi $BH \perp AC \Rightarrow H=$ortocentrul $\triangle ABC$.

Barem de corectare:

a)	din $\triangle OAB, \triangle OAC$ şi $\triangle OBC$ dreptunghice $\Rightarrow AB=AC=5\ cm;\ BC=4\sqrt{2}\ cm$	**1 p**
	din $\triangle ABC$ isoscel de bază BC avem $h_A=\sqrt{17}\ cm$	**1 p**
	$A_{\triangle ABC}=2\sqrt{34}\ cm^2$	**1 p**
b)	fie $OS \perp BC$, se arată că $AS(AH) \perp BC$	**1 p**
	se arată că $H=pr_{(ABC)}O \in AS$	**1 p**
	se arată că $AC \perp OH$ şi $AC \perp OB$ adică $AC \perp (OBH)$	**1 p**
	$BH \perp AC,\ AH \perp BC \rightarrow H=$ortocentrul $\triangle ABC$	**1 p**

Notă: Orice altă soluţie corectă se va puncta corespunzător.