OLIMPIADA SATELOR DIN ROMÂNIA

ETAPA LOCALĂ - SUCEAVA, 25.02.2023
BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

CLASA a VII-a

1. Se consideră numerele $a = \left(\frac{\sqrt{2}}{3-\sqrt{5}}\right)^{-2} - \sqrt{180} \cdot \left(\frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{6}} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{4}}{\sqrt{12}}\right)$ și

$b = \frac{1}{\sqrt{48}} \cdot \sqrt{[1,2(7) + 0,3(8)] : \frac{0,(5)}{4}}$

a) **(3p)** Arătați că a este număr natural.

b) **(4p)** Calculați media aritmetică și media geometrică a numerelor a și b.

Barem:

1a)	$a = \frac{(3-\sqrt{5})^2}{2} - 6\sqrt{5} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{12}} - \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{12}}\right) \Leftrightarrow$	1p
	$a = \frac{14-6\sqrt{5}}{2} - 6\sqrt{5} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 1 + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \Leftrightarrow$ $a = \frac{14-6\sqrt{5}}{2} - 6\sqrt{5} \cdot \left(\frac{1}{2} - 1\right) \Leftrightarrow$	1p
	$a = \frac{14-6\sqrt{5}}{2} + \frac{6\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow a = 7 \in \mathbb{N}$	1p
1b)	$b = \frac{1}{\sqrt{48}} \cdot \sqrt{[1,2(7) + 0,3(8)] : \frac{0,(5)}{4}} \Leftrightarrow b = \frac{1}{4\sqrt{3}} \cdot \sqrt{\left[\frac{115}{90} + \frac{35}{90}\right] : \frac{5}{36}} \Leftrightarrow$	1p
	$b = \frac{1}{4\sqrt{3}} \cdot \sqrt{\frac{150}{90} \cdot \frac{36}{5}} \Leftrightarrow b = \frac{1}{4\sqrt{3}} \cdot 2\sqrt{3} \Leftrightarrow b = \frac{1}{2}$	1p
	$m_a = \frac{a+b}{2} \Rightarrow m_a = \frac{7+0,5}{2} \Leftrightarrow m_a = 3,75$	1p
	$m_g = \sqrt{a \cdot b} \Rightarrow m_g = \sqrt{7 \cdot \frac{1}{2}} \Leftrightarrow m_g = \frac{\sqrt{14}}{2}$	1p

2. a) **(2p)** Arătați că $(\sqrt{a}+\sqrt{b})\cdot(\sqrt{a}-\sqrt{b})=a-b$, oricare ar fi $a,b\in\mathbb{R}_+$.

b) **(5p)** Arătați că $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{8}+\sqrt{10}}+\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{6}+\sqrt{10}}+\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{6}+\sqrt{8}}<2$.

Barem:

2a)	$(\sqrt{a}+\sqrt{b})\cdot(\sqrt{a}-\sqrt{b})=a-b \Leftrightarrow a-\sqrt{a\cdot b}+\sqrt{a\cdot b}-b=a-b \Leftrightarrow$	1p
	$a-b=a-b\ (A)$, oricare ar fi $a,b\in\mathbb{R}_+$.	1p
2b)	$\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{8}+\sqrt{10}}+\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{6}+\sqrt{10}}+\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{6}+\sqrt{8}}<2 \Leftrightarrow$ $\frac{\sqrt{6}(\sqrt{10}-\sqrt{8})}{10-8}+\frac{\sqrt{8}(\sqrt{10}-\sqrt{6})}{10-6}+\frac{\sqrt{10}(\sqrt{8}-\sqrt{6})}{8-6}<2 \Leftrightarrow$	1p
	$\frac{\sqrt{60}-\sqrt{48}}{2}+\frac{\sqrt{80}-\sqrt{48}}{4}+\frac{\sqrt{80}-\sqrt{60}}{2}<2 \Leftrightarrow \frac{3\sqrt{80}-3\sqrt{48}}{4}<2 \Leftrightarrow$	1p
	$\sqrt{5}-\sqrt{3}<\frac{2}{3} \Leftrightarrow 8-2\sqrt{15}<\frac{4}{9} \Leftrightarrow \frac{34}{9}<\sqrt{15} \Leftrightarrow$	2p
	$\sqrt{\frac{1156}{81}}<\sqrt{15} \Leftrightarrow \sqrt{1156}<\sqrt{1215}(A) \Rightarrow$ $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{8}+\sqrt{10}}+\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{6}+\sqrt{10}}+\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{6}+\sqrt{8}}<2$	1p

3. În triunghiul ABC avem $AB=6cm$, $BC=10cm$ și $\sphericalangle ABC=30^{\circ}$. Fie B'simetricul punctului B față de M, mijlocul laturii AC.

a) **(4p)** Calculați perimetrul și aria patrulaterului $ABCB'$.

b) **(3p)** Calculați aria triunghiului MAB.

Barem:

3a)	M mijlocul laturii $AC \Rightarrow AM\equiv MC$ B'simetricul punctului B față de $M \Rightarrow BM\equiv MB'$ În patrulaterul $ABCB'$ diagonalele se înjumătățesc $\Rightarrow ABCB'$ este paralelogram	1p
	$\mathcal{P}_{ABCB'}=2(AB+BC)\Rightarrow \mathcal{P}_{ABCB'}=32cm$	1p
	Fie $AD\perp BC$. În $\Delta ADB, \sphericalangle ADB=90^{\circ}, \sphericalangle ABC=30^{\circ}\Rightarrow AD=\frac{AB}{2}\Rightarrow AD=3cm$	1p
	$\mathcal{A}_{ABCB'}=BC\cdot AD\Rightarrow \mathcal{A}_{ABCB'}=30cm^2$	1p
3b)	AM este mediană în $\Delta ABB' \Rightarrow \mathcal{A}_{\Delta MAB}=\frac{1}{2}\cdot\mathcal{A}_{\Delta ABB'}$	1p

	$\mathcal{A}_{\Delta ABB'} = \frac{1}{2} \cdot \mathcal{A}_{ABCB'} \Rightarrow \mathcal{A}_{\Delta MAB} = \frac{1}{4} \cdot \mathcal{A}_{ABCB'}$	1p
	Rezultă că $\mathcal{A}_{\Delta MAB} = 7{,}5cm^2$	1p

4. (7p) Se consideră rombul $ABCD$ și punctul M mijlocul laturii BC. Pe diagonala BD se consideră punctul N astfel încât $DN = 2BN$. Demonstrați că punctele A, M, N sunt coliniare.

Barem:

4	Fie $AC \cap BD = \{O\}$. Din $ABCD$ romb $\Rightarrow$ punctul O este mijlocul fiecărei diagonale	1p
	Din $DN = 2BN \Rightarrow BD = 3BN$. Cum $BD = 2BO \Rightarrow \frac{BN}{BO} = \frac{2}{3}$	2p
	Cum BO este mediană în $\Delta ABC \Rightarrow N$ este centrul de greutate al triunghiului	2p
	AM este mediană în $\Delta ABC \Rightarrow N \in (AM)$ de unde rezultă că punctele A, M, N sunt coliniare.	2p

Notă: Orice altă soluţie corectă se va puncta corespunzător.