

OLIMPIADA SATELOR DIN ROMÂNIA
ETAPA LOCALĂ - SUCEAVA, 25.02.2023
BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

CLASA a VI-a

1. a) (3p) Determinați valoarea naturală a lui a pentru care

$$2^{a+4} + 2^{a+3} + 2^{a+2} + 2^{a+1} + 2^a = 31744$$

b) (4p) Determinați numerele naturale x și y , știind că îndeplinesc simultan condițiile: $(x, y) = 6$ și $x \cdot y = 432$.

Soluție:

$$a) \quad 2^{a+4} + 2^{a+3} + 2^{a+2} + 2^{a+1} + 2^a = 31744$$

$$2^a \cdot 2^4 + 2^a \cdot 2^3 + 2^a \cdot 2^2 + 2^a \cdot 2^1 + 2^a = 31744$$

$$2^a(2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^1 + 1) = 31744$$

$$2^a(16 + 8 + 4 + 2 + 1) = 31744$$

$$2^a \cdot 31 = 31744 \rightarrow 2^a = 1024$$

Finalizare $a = 10$

$$b) \quad (x, y) = 6 \Rightarrow \begin{cases} x = 6k_1 \\ y = 6k_2 \\ (k_1, k_2) = 1 \end{cases}$$

$$x \cdot y = 432 \Rightarrow 6k_1 \cdot 6k_2 = 432$$

$$36k_1k_2 = 432 \Rightarrow k_1k_2 = 12$$

$$1 \cdot 12 = 12 \rightarrow k_1 = 1, k_2 = 12 \Rightarrow x = 6 \text{ și } y = 72$$

$$3 \cdot 4 = 12 \rightarrow k_1 = 3, k_2 = 4 \Rightarrow x = 18 \text{ și } y = 24$$

$$4 \cdot 3 = 12 \Rightarrow k_1 = 4, k_2 = 3 \Rightarrow x = 24 \text{ și } y = 18$$

Barem:

$a) \quad 2^a \cdot 2^4 + 2^a \cdot 2^3 + 2^a \cdot 2^2 + 2^a \cdot 2^1 + 2^a = 31744$ $2^a(2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^1 + 1) = 31744$ $2^a(16 + 8 + 4 + 2 + 1) = 31744$	1p
$2^a \cdot 31 = 31744 \Rightarrow 2^a = 1024$	1p
Finalizare $a = 10$	1p
$b) \quad (x, y) = 6 \Rightarrow \begin{cases} x = 6k_1 \\ y = 6k_2 \\ (k_1, k_2) = 1 \end{cases}$	2p
$x \cdot y = 432 \Rightarrow 6k_1 \cdot 6k_2 = 432$ $36k_1k_2 = 432 \Rightarrow k_1k_2 = 12$	1p

$1 \cdot 12 = 12 \Rightarrow k_1 = 1, k_2 = 12 \Rightarrow x = 6 \text{ și } y = 72$ $3 \cdot 4 = 12 \Rightarrow k_1 = 3, k_2 = 4 \Rightarrow x = 18 \text{ și } y = 24$ $4 \cdot 3 = 12 \Rightarrow k_1 = 4, k_2 = 3 \Rightarrow x = 24 \text{ și } y = 18$	1p
--	----

2. Prețul unui produs s-a scumpit cu 20% și apoi s-a ieftinit cu 20 de lei, acesta ajungând să coste 23,20 lei.

a) (3p) Verificați dacă prețul inițial al produsului poate fi 26 de lei.

b) (4p) Determinați prețul produsului înainte de scumpire cu 20%.

Soluție:

a) $26 + 20\% \cdot 26 - 20$

$$26 + \frac{20}{100} \cdot 26 - 20 = 26 + 5,2 - 20 = 11,2 \text{ lei} \neq 23,20 \text{ lei}$$

Finalizare: Prețul inițial al produsului nu poate fi 26 de lei.

b) Notăm cu x prețul inițial al produsului

$$x + 20\%x - 20 = 23,20$$

$$x + \frac{x}{5} = 43,20$$

$$6x = 216$$

Finalizare: $x = 36$ lei

Barem:

a) $26 + 20\% \cdot 26 - 20$	1p
$26 + \frac{20}{100} \cdot 26 - 20 = 26 + 5,2 - 20 = 11,2 \text{ lei} \neq 23,20 \text{ lei}$	1p
Prețul inițial al produsului nu poate fi 26 de lei.	1p
b) Notăm cu x prețul inițial al produsului	1p
$x + 20\%x - 20 = 23,20$	1p
$x + \frac{x}{5} = 43,20$ $6x = 216$ Finalizare: $x = 36$ lei	2p

3. Fie unghiurile AOB, BOC, COD, DOE și EOA, în jurul punctului O. Știind că măsurile lor sunt invers proporționale cu 0,5; 0,(3); 0,25, 0,2 și 0,1(6):

a) (3p) Aflați măsurile unghiurilor AOB, BOC, COD, DOE și EOA.

b) (4p) Aflați măsura complementului unghiului determinat de bisectoarele unghiurilor COD și DOE.

Soluție:

a) $\sphericalangle AOB + \sphericalangle BOC + \sphericalangle COD + \sphericalangle DOE + \sphericalangle EOA = 360^\circ$

$$\sphericalangle AOB \cdot 0,5 = \sphericalangle BOC \cdot 0,3 = \sphericalangle COD \cdot 0,25 = \sphericalangle DOE \cdot 0,2 = \sphericalangle EOA \cdot 0,1(6)$$

$$\sphericalangle AOB \cdot \frac{1}{2} = \sphericalangle BOC \cdot \frac{1}{3} = \sphericalangle COD \cdot \frac{1}{4} = \sphericalangle DOE \cdot \frac{1}{5} = \sphericalangle EOA \cdot \frac{1}{6} = k$$

$$2k + 3k + 4k + 5k + 6k = 360^\circ \Rightarrow k = 360^\circ : 20 = 18^\circ$$

$$\text{Finalizare: } \sphericalangle AOB = 36^\circ, \sphericalangle BOC = 54^\circ, \sphericalangle COD = 72^\circ, \sphericalangle DOE = 90^\circ, \sphericalangle EOA = 108^\circ$$

b) Fie (OM bisectoarea unghiului COD $\Rightarrow \sphericalangle COM = \sphericalangle MOD = 36^\circ$)

Fie (ON bisectoarea unghiului DOE $\Rightarrow \sphericalangle DON = \sphericalangle NOE = 45^\circ$)

$$\sphericalangle MON = 36^\circ + 45^\circ = 81^\circ$$

Finalizare: Complementul unghiului MON are măsura egală cu $90^\circ - 81^\circ = 9^\circ$

Barem:

a) $\sphericalangle AOB + \sphericalangle BOC + \sphericalangle COD + \sphericalangle DOE + \sphericalangle EOA = 360^\circ$	1p
$\sphericalangle AOB \cdot 0,5 = \sphericalangle BOC \cdot 0,3 = \sphericalangle COD \cdot 0,25 = \sphericalangle DOE \cdot 0,2 = \sphericalangle EOA \cdot 0,1(6)$ $\sphericalangle AOB \cdot \frac{1}{2} = \sphericalangle BOC \cdot \frac{1}{3} = \sphericalangle COD \cdot \frac{1}{4} = \sphericalangle DOE \cdot \frac{1}{5} = \sphericalangle EOA \cdot \frac{1}{6} = k$	1p
$2k + 3k + 4k + 5k + 6k = 360^\circ \Rightarrow k = 360^\circ : 20 = 18^\circ$ Finalizare: $\sphericalangle AOB = 36^\circ, \sphericalangle BOC = 54^\circ, \sphericalangle COD = 72^\circ, \sphericalangle DOE = 90^\circ, \sphericalangle EOA = 108^\circ$	1p
b) Fie (OM bisectoarea unghiului COD $\Rightarrow \sphericalangle COM = \sphericalangle MOD = 36^\circ$) Fie (ON bisectoarea unghiului DOE $\Rightarrow \sphericalangle DON = \sphericalangle NOE = 45^\circ$)	2p
$\sphericalangle MON = 36^\circ + 45^\circ = 81^\circ$	1p
Finalizare: Complementul unghiului MON are măsura egală cu $90^\circ - 81^\circ = 9^\circ$	1p

4. Punctele C și D aparțin mediatoarei segmentului AB, de o parte și de alta a segmentului, astfel încât $AD \cap BC = \{E\}, AC \cap BD = \{F\}$. Demonstrați că:

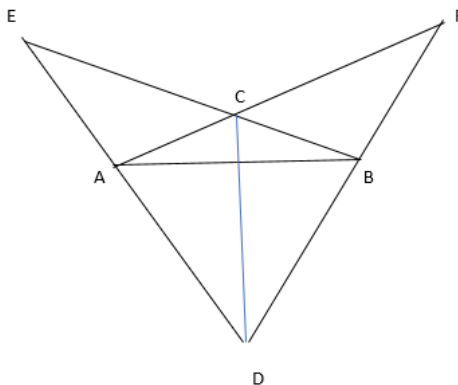
a) (3p) $\sphericalangle CAE \equiv \sphericalangle CBA$

b) (4p) $AE \equiv BF$

(Matematică de excelență pentru concursuri, olimpiade și centre de excelență, clasa a VI-a, pb. 4, pag. 221)

Soluție:

a)



$\Delta CAB, \Delta DAB$ isoscele, din proprietatea mediatoarei

Finalizare: $\sphericalangle CAB \equiv \sphericalangle CBA \Rightarrow \sphericalangle EAC \equiv \sphericalangle FBC$

b) $\Delta EAB \equiv \Delta FBA$ (U.L.U)

Finalizare: $AE \equiv BF$

Barem:

a) Figura	1p
$\Delta CAB, \Delta DAB$ isoscele, din proprietatea mediatoarei	1p
Finalizare: $\sphericalangle CAB \equiv \sphericalangle CBA \Rightarrow \sphericalangle EAC \equiv \sphericalangle FBC$	1p
b) $\Delta EAB \equiv \Delta FBA$ (U.L.U)	3p
Finalizare: $AE \equiv BF$	1p

Notă: Orice altă soluție corectă se va puncta corespunzător.