OLIMPIADA SATELOR DIN ROMÂNIA

ETAPA LOCALĂ - SUCEAVA, 23.02.2024
BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

CLASA a V-a

1. a) (4p) Arătați că numărul $A = 10^3 : \{248 + 34 : [(2 \cdot 3^2)^2 : 18 - 2024^0 \cdot 1^{2024}]\}$ este pătrat perfect.

b) (3p) Aflați suma numerelor prime cuprinse între 10 și 30.

Soluție:

a) $A = 10^3 : \{248 + 34 : [(2 \cdot 3^2)^2 : 18 - 2024^0 \cdot 1^{2024}]\} = 10^3 : \{248 + 34 : [18^2 : 18 - 1]\} = 1000 : \{248 + 34 : 17\} = 1000 : 250 = 4 = 2^2 - pătrat\ perfect$

b) $S = 11 + 13 + 17 + 19 + 23 + 29 = 112$

Barem:

$a)\ A = 10^3 : \{248 + 34 : [18^2 : 18 - 1]\}$	1p
$A = 1000 : \{248 + 34 : 17\}$	1p
$A = 1000 : 250 = 4$	1p
$A = 2^2 - pătrat\ perfect$	1p
b) Identifică numerele prime corect	1p
$S = 11 + 13 + 17 + 19 + 23 + 29$	1p
$S = 112$	1p

2. (7p) Într-o familie cu patru membri, fiul este cu doi ani mai mare decât fiica, iar tatăl este cu un an mai mare decât mama. Știind că vârsta mamei este de trei ori mai mare decât vârsta fiicei și că toți au împreună 107 ani, aflați câți ani are fiecare membru al familiei.

Soluție:

$a - vârsta\ fiicei; b - vârsta\ fiului; c - vârsta\ mamei; d - vârsta\ tatălui$

$b = a + 2; d = c + 1; c = 3 \cdot a;\ a + b + c + d = 107;$

$d = 3 \cdot a + 1 \Rightarrow a + a + 2 + 3 \cdot a + 3 \cdot a + 1 = 107 \Rightarrow 8 \cdot a + 3 = 107 \Rightarrow 8 \cdot a = 104 \Rightarrow$

$\Rightarrow a = 13 \Rightarrow b = 15; c = 39; d = 40.$

Barem:

$a - vârsta\ fiicei; b - vârsta\ fiului; c - vârsta\ mamei; d - vârsta\ tatălui$ $b = a + 2; d = c + 1; c = 3 \cdot a;\ a + b + c + d = 107;$	2p
$d = 3 \cdot a + 1$	1p
$a + b + c + d = 107 \Rightarrow a + a + 2 + 3 \cdot a + 3 \cdot a + 1 = 107$	1p
$8 \cdot a + 3 = 107 \Rightarrow 8 \cdot a = 104 \Rightarrow a = 13$	2p
$b = 15; c = 39; d = 40$	1p

3. (7p) Comparați numerele a și b, dacă $a = 2 \cdot 2^2 \cdot 2^3 \cdot 2^4 \cdot \ldots \cdot 2^{2500}$ și $b = (32^{250})^{2490}$.

Soluție:

$a = 2 \cdot 2^2 \cdot 2^3 \cdot 2^4 \cdot \ldots \cdot 2^{2500} = 2^{1+2+3+\cdots+2500} = 2^{2500\cdot 2501:2} = 2^{1250\cdot 2501}$

$b = (32^{250})^{2490} = [(2^5)^{250}]^{2490} = 2^{5\cdot 250\cdot 2490} = 2^{1250\cdot 2490}$

$2501 > 2490 \Rightarrow a > b$

Barem:

$a = 2 \cdot 2^2 \cdot 2^3 \cdot 2^4 \cdot \ldots \cdot 2^{2500} = 2^{1+2+3+\cdots+2500}$	1p
$a = 2^{2500\cdot 2501:2} = 2^{1250\cdot 2501}$	2p
$b = (32^{250})^{2490} = [(2^5)^{250}]^{2490}$	1p
$b = 2^{5\cdot 250\cdot 2490} = 2^{1250\cdot 2490}$	2p
$2501 > 2490 \Rightarrow a > b$	1p

4. (7p) Arătați că suma numerelor $\overline{abc}$ și $\overline{def}$ este divizibilă cu 100 știind că $\overline{def} = 11011_{(2)} + 10001_{(2)} + \overline{abc}$, iar $\overline{abc}$ este un număr care verifică relațiile:

- $\overline{bc} = 4 \cdot a$;
- $b + c = 10$;
- a este număr prim.

Soluție:

$a - \textit{număr prim și } a \leq 9 \Rightarrow a \in \{2; 3; 5; 7\}$

$\overline{bc} = 4 \cdot a \Rightarrow a \in \{3; 5; 7\}$ și $\overline{bc} \in \{12; 20; 28\};$ $\textit{dar } b + c = 10 \Rightarrow \overline{bc} = 28 \Rightarrow \overline{abc} = 728$

$\overline{def} = 11011_{(2)} + 10001_{(2)} + \overline{abc} = 2^4 + 2^3 + 2^1 + 2^0 + 2^4 + 2^0 + 728$

$\overline{def} = 16 + 8 + 2 + 1 + 16 + 1 + 728 = 772$

$S = \overline{def} + \overline{abc} = 772 + 728 = 1500 = 15 \cdot 100 \Rightarrow S \,\vdots\, 100.$

Barem:

$a - \textit{număr prim și } a \leq 9 \Rightarrow a \in \{2; 3; 5; 7\}$	1p
$\overline{bc} = 4 \cdot a \Rightarrow a \in \{3; 5; 7\}$ și $\overline{bc} \in \{12; 20; 28\};$ $\textit{dar } b + c = 10 \Rightarrow \overline{bc} = 28 \Rightarrow \overline{abc} = 728$	2p
$\overline{def} = 11011_{(2)} + 10001_{(2)} + \overline{abc} = 2^4 + 2^3 + 2^1 + 2^0 + 2^4 + 2^0 + 728$	1p
$\overline{def} = 16 + 8 + 2 + 1 + 16 + 1 + 728 = 772$	1p
$S = \overline{def} + \overline{abc} = 772 + 728 = 1500 = 15 \cdot 100 \Rightarrow S \,\vdots\, 100$	2p

Notă: Orice altă soluţie corectă se va puncta corespunzător.