OLIMPIADA SATELOR DIN ROMÂNIA

ETAPA JUDEȚEANĂ - SUCEAVA, 04.03.2023
BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

CLASA a VIII-a

1. a) (3p) Considerăm numerele:

$$A=\frac{1}{1\cdot 6}+\frac{1}{2\cdot 9}+\frac{1}{3\cdot 12}+.....+\frac{1}{99\cdot 300} \text{ și } B=\sqrt{\frac{1}{7}+\left(\frac{9}{14}+\frac{10}{21}+...+\frac{70}{441}\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{63}\right)}$$

Calculati $A\cdot B+\frac{1}{100}$.

Gazeta Matematică Nr. 9/2022

b) (4p) Dacă N= $|2a-3|-|-3a|+3\cdot|5-a|$ rezolvaţi ecuația: N=28

Soluție

$a)$ $A=\frac{1}{1\cdot 6}+\frac{1}{2\cdot 9}+\frac{1}{3\cdot 12}+.....+\frac{1}{99\cdot 300}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+...+\frac{1}{99\cdot 100}\right)=$ $=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{100}\right)=\frac{33}{100}$	**1p**
$B=\sqrt{\frac{1}{7}+\left(\frac{9}{14}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{10}{21}-\frac{1}{3}\right)+...+\left(\frac{70}{441}-\frac{1}{63}\right)}=\sqrt{\frac{1}{7}+\frac{2}{14}+\frac{3}{21}+...+\frac{63}{441}}=\sqrt{\frac{1}{7}\cdot 63}=3$	**1p**
$A\cdot B+\frac{1}{100}=\frac{33}{100}\cdot 3+\frac{1}{100}=1$	**1p**
b) Pentru $a\le 0$ şi N=28 obţinem 3–2a+3a+3(5–a) = 28$\Rightarrow$–2a = 28–3–15$\Rightarrow$$a$ =–5	**1p**
Pentru $0<a\le\frac{3}{2}$ şi N=28 obţinem 3–2a–3a+3(5-a) = 28$\Leftrightarrow$–8a = 28–3–15$\Leftrightarrow$$a=-\frac{5}{4}$ dar $0<a\le\frac{3}{2}$ (în acest interval nu are soluție) Pentru $\frac{3}{2}>$a<5, şi N=28 obținem 2a–3–3a+3(5–a) = 28$\Leftrightarrow$–4a = 28+3–15$\Leftrightarrow$$a$ =–4 dar $\frac{3}{2}>$a<5 (In acest interval nu are soluție)	**1p**
Pentru $a\ge 5$ obţinem 2a–3–3a+3(a–5) = 28$\Rightarrow$2a = 28+3+15$\Rightarrow$$a$ =23	**1p**
Soluţie: $a\in\{-5;23\}$	**1p**

2. a) (2p) Calculați: $\left(\sqrt{x-1}-2\right)^2$.

b) (5p) Dacă S= $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}$ și 5 < x < 10, arătați că S este pătrat perfect.

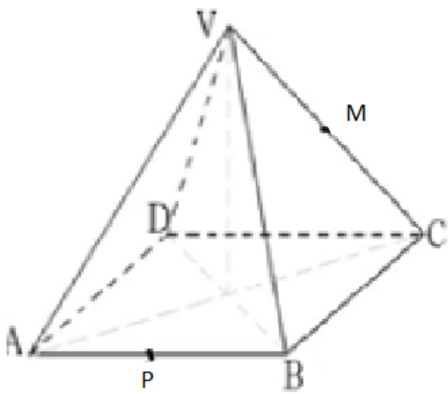
Soluție

a) $\left(\sqrt{x-1}-2\right)^2=x+3-4\sqrt{x-1}$	**2p**
$b)\ S=\sqrt{x-1-4\sqrt{x-1}+4}+\sqrt{x-1-6\sqrt{x-1}+9}=$ $=\sqrt{(\sqrt{x-1}-2)^2}+\sqrt{(\sqrt{x-1}-3)^2}=\left\|\sqrt{x-1}-2\right\|+\left\|\sqrt{x-1}-3\right\|$	**2p**
Cum $5<x<10\Rightarrow 2<\sqrt{x-1}<3\Rightarrow\left\|\sqrt{x-1}-2\right\|=\sqrt{x-1}-2$	**1p**
$\left\|\sqrt{x-1}-3\right\|=3-\sqrt{x-1}$	**1p**
S = 1	**1p**

3. Fie piramida patrulateră regulată *VABCD* cu *VA*= 6 cm, apotema bazei de 3 cm și *M*, *P* mijloacele laturilor *VC* respectiv *AB*.

a) (2p) Arătați că muchia *VA* este paralelă cu planul *(BMD)*.

b) (5p) Aflați lungimea segmentului *MP*.



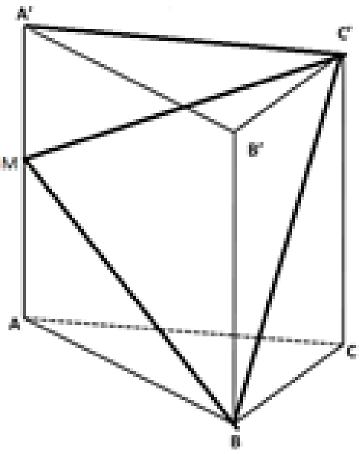
Soluție

a) *O* mijlocul lui [*AC*], *M* mijlocul lui [*VC*] deci *MO* este linie mijlocie în triunghiul *VAC*	**1p**
$VA \parallel MO$ și $MO\subset(BMD)\Rightarrow\ VA\parallel(BMD)$	**1p**
b) Fie *N* mijlocul segmentului *BC*. Obținem $MN\parallel VB$ și $MN=\frac{VB}{2}=3\ cm$	**1p**
Apotema bazei este de 3cm$\Rightarrow$*AC*=$6\sqrt{2}\,cm$	**1p**
PN linie mijlocie în triunghiul *ABC* $\Rightarrow NP\parallel AC$ și $NP=3\sqrt{2}\,cm$	**1p**
$VB\perp AC$, $MN\parallel VB$ și $NP\parallel AC\ \Rightarrow NM\perp NP$	**1p**
Aplicând teorema lui Pitagora în ΔMNP obținem $MP=3\sqrt{3}\,cm$	**1p**

4. Se dă prisma triunghiulară regulată *ABCA'B'C'* cu *AB* = 6 cm şi *AA'* = $6\sqrt{3}$ cm.

a) (2p) Aflați măsura unghiului format de *A'B* cu *(ABC)*.

b) (5p) Dacă $M \in (AA')$ şi $AM \equiv MA'$ să se afle măsura unghiului format de planele *(C'BM)* şi *(ABC)*.



Soluție

a) $pr_{(ABC)}A'B = AB \Rightarrow \left(A'B, \widehat{(ABC)}\right) = \widehat{A'BA}$	**1p**
AB = 6 cm şi *AA'* = $6\sqrt{3}\,cm \Rightarrow \left(A'B, \widehat{(ABC)}\right) = \widehat{A'BA} = 60°$	**1p**
$b)\ MB = MC^{`} = 3\sqrt{7}cm, BC^{`} = 12cm$	**1p**
Fie *O* mijlocul segmentului *BC'*, *MO* = $3\sqrt{3}\,cm$	**1p**
$A_{MBC^{`}} = 18\sqrt{3}cm^2$ , $A_{ABC^{`}} = 9\sqrt{3}cm^2$	**1p**
$pr_{(ABC)} \triangle C'MB = \triangle CAB \Rightarrow A_{\triangle ABC} = A_{\triangle MBC} \cdot cos\left(\widehat{(MBC),(ABC)}\right)$	**1p**
$\Rightarrow 9\sqrt{3} = 18\sqrt{3} \cdot cos\left(\widehat{(MBC),(ABC)}\right) \Rightarrow \left(\widehat{(MBC),(ABC)}\right) = 60°$	**1p**

Notă: Orice altă soluţie corectă se va puncta corespunzător.