OLIMPIADA SATELOR DIN ROMÂNIA

ETAPA JUDEȚEANĂ - SUCEAVA, 04.03.2023
BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

CLASA a V-a

1. a) (3p) Arătați că numărul $x=2023^2-2023-2022$ este pătrat perfect.

b) (4p) Aflați câte numere naturale consecutive (începând cu 1) trebuie să adunăm, pentru ca dublul sumei să fie egal cu ultimul termen mărit cu 4092529.

Barem:

a) $x=2023\cdot(2023-1)-2022=2023\cdot 2022-2022$	**1p**
$=2022\cdot(2023-1)$	**1p**
$=2022\cdot 2022=2022^2$	**1p**
b) $S=1+2+3+\ldots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$	**1p**
$2S=n+4092529 \Rightarrow 2\cdot\dfrac{n(n+1)}{2}=n+4092529$, deci $n^2+n=n+4092529$	**2p**
$n^2=4092529 \Rightarrow n=2023^2$	**1p**

2. a) (3p) Arătați că produsul a două numere naturale consecutive este par.

b) (4p) Să se determine numerele naturale x și y, știind că $y^2+y=2^x+551$.

Barem:

a) $\forall n\in\mathbb{N}$: $n=2k$ *sau* $n=2k+1,\ k\in\mathbb{N}$	**1p**
$n=2k\Rightarrow n(n+1)=2k(2k+1)$ par	**1p**
$n=2k+1\Rightarrow n(n+1)=(2k+1)(2k+2)=(2k+1)\cdot 2\cdot(k+1)$ par	**1p**
b) $y^2+y=2^x+551\Leftrightarrow y(y+1)=2^x+551$	**1p**
$y(y+1)$ *par, deci* 2^x+551 *este par, adică* 2^x *impar, de unde* $x=0$.	**2p**
$y(y+1)=552$, *de unde* $y=23$ $x=0;\ y=23$	**1p**

3. Emilia a cumpărat mărțișoare pe care vrea să le așeze în plicuri: dacă ar pune câte două mărțișoare într-un plic, atunci ar rămâne cu 7 mărțișoare fără plic. Dacă ar pune câte 3 mărțișoare într-un plic, atunci ar rămâne un plic gol și un plic ar avea doar două mărțișoare.

a) (3p) Este posibil ca numărul de mărțișoare să fie 30?

b) (4p) Aflați câte mărțișoare a cumpărat Emilia.

Barem:

a) Nu, numărul mărțișoarelor este de forma $2n+7$, deci impar.	3p
b) Fie *m* – numărul de mărțișoare și *p* – numărul de plicuri $\underbrace{\underbrace{2}\ \underbrace{2}\ \underbrace{2}\ \dots\ \underbrace{2}}_{p\ plicuri}\ \ 7$, deci $2p+7=m$	1p
$\underbrace{\underbrace{3}\ \underbrace{3}\ \underbrace{3}\ \dots\ \underbrace{3}}_{p-2\ plicuri}\ \ \underbrace{}\ \underbrace{2}$, deci $3(p-2)+2=m$	1p
$2p+7=3(p-2)+2$ $p=11;\ m=29.$	2p

4. a) (3p) Demonstrați că numărul $N=\left(3^n\cdot 2^{2n}+10^{2023}\right)^{2023}$ este divizibil cu 11, pentru $\forall n\in\mathbb{N}$

Gazeta Matematică Nr. 3/2022

b) (4p) Se dă șirul $1, 2, 3, \dots, 2023$. Luăm la întâmplare două numere din acest șir, iar în locul lor punem diferența lor (cel mai mare minus cel mai mic) și continuăm procedura până în șir rămâne un singur număr. Arătați că ultimul număr rămas din acest șir este par.

Barem:

a) $3^n\cdot 2^{2n}=(3\cdot 4)^n=12^n=(11+1)^n=M_{11}+1^n=M_{11}+1.$	**1p**
$10^{2023}=10^{2022}\cdot 10=100^{1011}\cdot 10=\left(M_{11}+1\right)^{1011}\cdot 10=\left(M_{11}+1\right)\cdot 10=M_{11}+10.$	**1p**
$N=\left(M_{11}+1+M_{11}+10\right)^{2023}=\left(M_{11}\right)^{2023}=M_{11}.$ Deci, $N\ \vdots\ 11,\ \forall n\in\mathbb{N}.$	**1p**
b) Suma numerelor din șir este: $S=1+2+3+\dots+2023=\frac{2023\cdot 2024}{2}=2023\cdot 1012$, număr par	**1p**
Dacă numerele *x* și *y* cu $x>y$ se înlocuiesc cu $x-y$, suma după această operație este: $S_1=S-(x+y)+(x-y)=S-x-y+x-y=S-2y$, număr par Rezultă că, după fiecare pas suma numerelor rămase în șir este un număr par.	**2p**
Înainte de ultimul pas avem în șir două numere care au suma un număr par. Ele fiind înlocuite cu diferența lor obținem tot un număr par. Deci, ultimul număr rămas este un număr par.	**1p**

Notă: Orice altă soluție corectă se va puncta corespunzător.